Rozdział V

GRANICE FUNKCJI

§ 5.1. GRANICA LEWOSTRONNA I GRANICA PRAWOSTRONNA FUNKCJI

Mówimy, że liczba g jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=g,$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ można wskazać taką liczbę (istnieje taka liczba) $\delta>0$, żeby było

$$|f(x)-g|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę za pomocą symboli określonych w rozdziale I możemy zapisać następująco

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x)=g\right)\equiv\left(\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x}\left((c-\delta<x<c)\Rightarrow(|f(x)-g|<\varepsilon)\right)\right).$$

Granicę lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=0$ oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$.

Zauważmy, że na to, by granica lewostronna mogła istnieć, funkcja powinna być określona w pewnym przedziale otwartym, którego prawym końcem jest c. Natomiast dla $x=c$ oraz $x>c$ funkcja może nie być określona.

Mówimy, że $+\infty$ jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=+\infty,$$

jeżeli dla każdej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, żeby było

$$f(x)>M \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę możemy zapisać następująco:

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x)=+\infty\right)\equiv\left(\bigwedge_{M>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x}\left((c-\delta<x<c)\Rightarrow(f(x)>M)\right)\right).$$

Mówimy, że $-\infty$ jest *granicą lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=-\infty,$$

jeżeli dla każdej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, żeby było

$$f(x)<-M \quad \text{dla} \quad c-\delta<x<c.$$

Definicję tę można zapisać następująco:

$$\left(\lim_{x\to c-0} f(x) = -\infty\right) \equiv \left(\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x} \big((c-\delta<x<c) \Rightarrow (f(x)<-M)\big)\right).$$

Dla *prawostronnej granicy funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$ podaje się definicje odpowiednio, jak wyżej, z tą tylko zmianą, że podane nierówności mają być spełnione dla x zawartego w przedziale $c<x<c+\delta$. Granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=c$ oznaczamy symbolem $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$, a w punkcie $x=0$ – symbolem $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$.

Granica lewostronna i granica prawostronna funkcji noszą wspólną nazwę *granic jednostronnych*.

W podanych poprzednio definicjach określiliśmy granicę lewostronną i granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie $x=c$ w *sensie Cauchy'ego*. Oprócz tej definicji jest jeszcze inna definicja granicy funkcji w *sensie Heinego*, mianowicie mówimy, że liczba g (ewentualnie $+\infty$, $-\infty$) jest *granicą lewostronną* (*granicą prawostronną*) *funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do c i takiego, że dla każdego n zachodzi nierówność ostra $x_n<c$ ($x_n>c$), mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$ (ewentualnie $+\infty$ albo odpowiednio $-\infty$).

Przy określeniu granicy w sensie Heinego zakładamy, że została poprzednio określona granica ciągu (to założenie przy definicji Cauchy'ego nie jest potrzebne).

Można udowodnić, że *definicje Cauchy'ego i Heinego granicy* (*lewostronnej i prawostronnej*) *funkcji* $f(x)$ *w punkcie* $x=c$ *są równoważne.*

Uwaga. Każda z tych definicji ma inne zalety. Zaletą definicji Cauchy'ego jest to, że ta definicja obejmuje granicę ciągu (jeżeli ciąg rozumieć jako funkcję zmiennej naturalnej), natomiast zaletą definicji Heinego jest to, że daje się ona łatwiej przenosić w przypadkach uogólnień funkcji – tzn. operacji, dystrybucji itp.

§ 5.2. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA GRANIC JEDNOSTRONNYCH

Zapis $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=g$ geometrycznie oznacza (rys. 5.1), że jakikolwiek weźmiemy wąski pasek

(1) $$g-\varepsilon<y<g+\varepsilon,$$

to musi istnieć takie *otoczenie lewostronne* punktu $x=a$ [1], czyli taki przedział

(2) $$a-h<x<a, \quad \text{gdzie} \quad h>0,$$

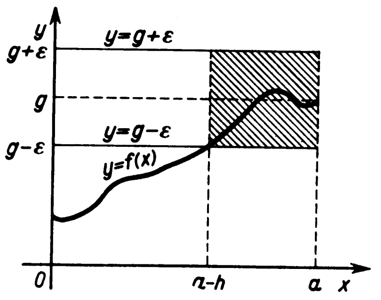
że cały wykres funkcji dla x z przedziału (2) znajduje się w pasku (1).

Zapis $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ geometrycznie oznacza (rys. 5.2), że dla każdej prostej $y=M$ istnieje taki przedział $(a-h, a)$, gdzie $h>0$, że cały wykres funkcji odpowiadającej temu

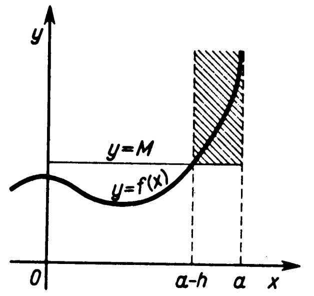
---

[1] Ogólnie *otoczeniem punktu* $x=a$ *o promieniu* $h>0$ nazywamy przedział otwarty

$$a-h<x<a+h.$$



Rys. 5.1



Rys. 5.2

przedziałowi znajduje się ponad prostą $y=M$. Z tego wynika, że prosta $x=a$ jest tzw. *asymptotą pionową* krzywej $y=f(x)$, gdy $y\to\infty$ (por. str. 194).

Analogiczną interpretację geometryczną ma granica prawostronna funkcji.

§ 5.3. GRANICA FUNKCJI

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ w punkcie $x=c$, co zapisujemy

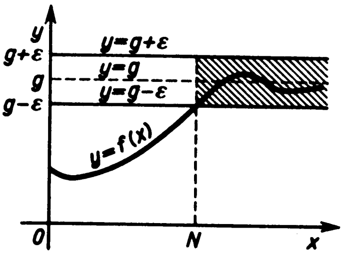
(1) $$\lim_{x\to c} f(x)=g,$$

jeżeli istnieją granice lewostronna i prawostronna w punkcie $x=c$ i obie są równe liczbie g tzn. jeżeli

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=\lim_{x\to c+0} f(x)=g.$$

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x\to+\infty$, co zapisujemy

(2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=g,$$



Rys. 5.3

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $N>0$, żeby było $|f(x)-g|<\varepsilon$ dla każdej wartości $x>N$,

Zapis (2) geometrycznie oznacza (rys. 5.3), że jakkolwiek jest wąski pasek $g-\varepsilon<y<g+\varepsilon$, to istnieje taka prosta $x=N$, że cały wykres funkcji $y=f(x)$ na prawo od prostej $x=N$ znajduje się wewnątrz tego paska. Z tego wynika, że prosta $y=g$ jest tzw. *asymptotą poziomą* krzywej $y=f(x)$, gdy $x\to+\infty$.

Mówimy, że liczba g jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x\to-\infty$, co zapisujemy

(3) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=g,$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $K>0$, żeby było $|f(x)-g|<\varepsilon$ dla każdej wartości $x<-K$.

Mówimy, że *funkcja* $f(x)$ *dąży do* $+\infty$ *przy* $x \to +\infty$, co zapisujemy

(4) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $K>0$, żeby było $f(x)>M$ dla każdej wartości $x>K$.

Mówimy, że *funkcja* $f(x)$ *dąży do* $-\infty$ *przy* $x\to+\infty$, co zapisujemy

(5) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

$-M$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M>0$ istnieje taka liczba $K>0$, żeby było $f(x)<M$ dla każdej wartości $x>-K$.

Podobnie określamy granice

(6) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Zachodzą następujące twierdzenia o granicach:

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *oraz* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, *to*

(5.3.1) $$\lim_{x\to c}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x),$$

(5.3.2) $$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x),$$

(5.3.3) $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}, \quad \textit{pod warunkiem, że} \quad \lim_{x\to c} g(x) \neq 0.$$

Analogiczne twierdzenia zachodzą dla granic lewostronnych i prawostronnych. Zapis twierdzeń dla granic lewostronnych otrzymamy z zapisu podanych twierdzeń zastępując symbol $x\to c$ symbolem $x\to c-0$, a dla granic prawostronnych zastępując symbol $x\to c$ symbolem $x\to c+0$.

§ 5.4. CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją ciągłą w punkcie* $x=c$, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i jeżeli granica ta równa się $f(c)$.

Zachodzą następujące twierdzenia dotyczące ciągłości funkcji:

(5.4.1) *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie $x=c$ jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

(5.4.2) *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie $x=c$ jest funkcją ciągłą w tym punkcie,*

(5.4.3) *Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie $x=c$ takim, że dzielnik jest różny od zera, jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

(5.4.4) *Jeżeli funkcja złożona (superponowana) $f(g(x))$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu $x=x_0$, funkcja $g(x)$ jest ciągła w punkcie $x=x_0$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w punkcie $u=u_0$, gdzie $u_0=g(x_0)$, to funkcja złożona $f(g(x))$ jest ciągła w punkcie $x=x_0$.*

Ciągłość najważniejszych funkcji:

(5.4.5) *Wielomian*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości x.

(5.4.6) *Funkcja wymierna*

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

jest funkcją ciągłą dla tych wartości x, przy których mianownik jest różny od zera.

(5.4.7) *Funkcja potęgowa* x^a, gdzie a jest to stała dowolna, jest określona i ciągła dla wartości $x>0$.

(5.4.8) *Funkcja wykładnicza*

$$a^x, \quad \text{gdzie} \quad a>0,$$

jest ciągła dla wszystkich wartości x.

(5.4.9) *Funkcja logarytmiczna*

$$\log_a x, \quad \text{gdzie} \quad a>0 \text{ i } a \neq 1,$$

jest ciągła dla wartości $x>0$.

(5.4.10) *Funkcje trygonometryczne* są ciągłe:

1° $\sin x$ i $\cos x$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{tg} x$ dla $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą,

3° $\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

(5.4.11) *Funkcje kołowe (cyklometryczne)* są ciągłe:

1° $\arcsin x$ i $\arccos x$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

2° $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ dla wszystkich wartości x.

(5.4.12) *Funkcje hiperboliczne* są ciągłe:

1° $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{ctgh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ dla $x \neq 0$.

(5.4.13) *Funkcje area*(1) *(odwrotne względem funkcji hiperbolicznych)* są ciągłe:

(1) Słowo *area* oznacza pole.

1° $\operatorname{arsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ dla wszystkich wartości x,

2° $\operatorname{arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ dla $x \geqslant 1$,

3° $\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ dla $-1<x<1$,

4° $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ dla $x<-1$ oraz dla $x>1$.

ZADANIE 5.1. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2}$$

w punkcie $x=2$.

Rozwiązanie. Funkcja badana jest funkcją wymierną, której mianownik jest różny od zera, a więc funkcja ta w punkcie $x=2$ jest ciągła. Z tego wynika, że $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ istnieje i równa się

$$f(2)=\frac{2-1}{4+2}=\frac{1}{6},$$

czyli

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2+2}=\frac{1}{6}.$$

ZADANIE 5.2. Wyznaczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$$

w punkcie $x=2$.

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że dla $x=2$ zarówno mianownik, jak i licznik funkcji $f(x)$ równają się zeru, a więc funkcja $f(x)$ w punkcie $x=2$ nie jest określona. Chcemy znaleźć jej granicę w tym punkcie.

Licznik i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ są wielomianami, które przy $x=2$ są równe zeru, a więc zarówno licznik, jak i mianownik mają dzielnik $x-2$. Aby czynnik ten wydzielić w liczniku, sprowadzamy licznik do postaci iloczynowej według wzoru([1])

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1 równa się 2, a x_2 znajdujemy ze wzoru $x_1+x_2=-b\ a$ lub ze wzoru $x_1\cdot x_2=c/a$; otrzymujemy

$$3x^2-5x-2=3(x-2)(x+\tfrac{1}{3}).$$

Mianownik po wyciągnięciu 5 przed nawias jest różnicą kwadratów, a więc możemy go przedstawić jako iloczyn różnicy przez sumę:

$$5x^2-20=5(x^2-4)=5(x-2)(x+2).$$

([1]) Trójmian kwadratowy można wyrazić w postaci iloczynu czynników rzeczywistych pierwszego stopnia tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu $\Delta=b^2-4ac$ jest nieujemny

Napiszemy funkcję $f(x)$ w postaci iloczynu dwóch ułamków:

$$f(x)=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x-2}.$$

Pierwszy czynnik

$$\varphi(x)=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją wymierną, ciągłą dla $x=2$, ponieważ mianownik jego w tym punkcie jest różny od zera, a więc $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)$ istnieje i równa się

$$\varphi(2)=\frac{3(2+\frac{1}{3})}{5(2+2)}=\frac{7}{20}.$$

Drugi czynnik

$$g(x)=\frac{x-2}{x-2}$$

funkcji $f(x)$ równa się 1 dla $x\neq 2$, a dla $x=2$ nie jest zdefiniowany; w myśl więc definicji granicy $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ istnieje i równa się 1.

Na podstawie twierdzenia o granicy iloczynu mamy

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}=\frac{7}{20}\cdot 1=\frac{7}{20}.$$

ZADANIE 5.3. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5}$$

w punkcie $x=-5$.

Rozwiązanie. Dla $x=-5$ licznik i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ równają się zeru. Chcemy wydzielić czynnik $x+5$. W tym celu do licznika zastosujemy wzór

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Mamy więc

$$2x^3+250=2(x^3+125)=2(x+5)(x^2-5x+25).$$

Mianownik też sprowadzamy do postaci iloczynowej

$$x^2+4x-5=(x-1)(x+5).$$

Możemy więc funkcję $f(x)$ przedstawić w postaci iloczynu dwóch ułamków

$$f(x)=\frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}\cdot\frac{x+5}{x+5}.$$

Pierwszy czynnik

$$\varphi(x)=\frac{2(x^2-5x+25)}{x-1}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=-5$, a więc granica $\lim_{x\to-5}\varphi(x)$ istnieje i równa się

$$\varphi(-5)=\frac{2(25+25+25)}{-5-1}=-25;$$

drugi zaś czynnik równa się 1 dla $x\neq -5$, a więc

$$\lim_{x\to-5}\frac{x+5}{x+5}=1,$$

czyli ostatecznie

$$\lim_{x\to-5}\frac{2x^3+250}{x^2+4x-5}=-25.$$

ZADANIE 5.4. Obliczyć granice funkcji:

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^3}$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Wprost z definicji (w § 5.1) widać, że: $\lim_{x\to+0} 1/x=+\infty$, gdyż dla dowolnego $M>0$ można dobrać $\delta=1/M$ i wówczas będzie $1/x>M$ dla $0<x<\delta$; dla M zaś ujemnego wartość δ może być dowolną liczbą dodatnią; $\lim_{x\to-0} 1/x=-\infty$, gdyż dla dowolnego $M>0$ można wziąć $\delta=-1/M$, dla M zaś dodatniego wartość δ może być dowolną liczbą dodatnią.

Podobnie łatwo wykazać, że

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

Określamy funkcję $[x]$ *entier*[1] x jako największą liczbę całkowitą N spełniającą warunek $N\leqslant x$. Na przykład

$$[\tfrac{5}{3}]=1,\quad [2]=2,\quad [\pi]=3,\quad [-\tfrac{2}{3}]=-1,\quad [-\pi]=-4.$$

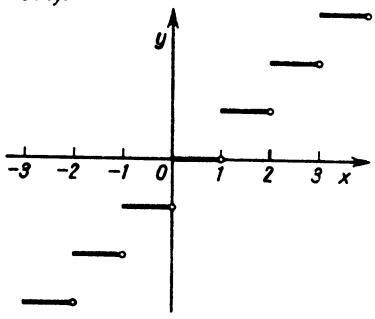
ZADANIE 5.5. Obliczyć granicę funkcji $[x]$ w punkcie $x=3$.

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć wprost z definicji granicy, że $\lim_{x\to3+0}[x]=3$, gdyż dla $3\leqslant x<4$ jest $[x]=3$, natomiast $\lim_{x\to3-0}[x]=2$, ponieważ dla $2\leqslant x<3$ jest $[x]=2$. A więc granica funkcji $[x]$ w punkcie $x=3$ nie istnieje. Uogólniając to, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

---

(1) Z francuskiego *entier* — całkowity.

(5.4.1 4) *Funkcja* $[x]$ *jest określona dla wszystkich* x, *nieciągła dla* x *całkowitych, ciągła dla* x *pozostałych* (rys. 5.4).



Rys. 5.4

ZADANIE 5.6. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{a\sin bx}{cx}, \quad \text{gdzie} \quad c\neq 0,$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Przy $x=0$ zarówno licznik, jak i mianownik wyrażenia ułamkowego $f(x)$ stają się równe zeru. Znalezienie granicy danego wyrażenia opierać się będzie na następującym podstawowym wzorze z teorii granic:

(5.4.15)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Gdy $x\to 0$, to również $bx\to 0$ oraz $\dfrac{\sin bx}{bx}\to 1$. Ponieważ w mianowniku rozważanego przykładu brak czynnika b, mnożymy licznik i mianownik przez b i otrzymujemy

$$\frac{a\sin bx}{cx}=\frac{ab}{c}\cdot\frac{\sin bx}{bx}\to\frac{ab}{c}\cdot 1=\frac{ab}{c}, \quad \text{gdy} \quad x\to 0.$$

ZADANIE 5.7. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{10x}{\operatorname{tg} 3x}$$

Rozwiązanie. Ponieważ licznik i mianownik dla $x=0$ stają się równe zeru, przekształcamy powyższe wyrażenie w sposób następujący:

$$\frac{10x}{\operatorname{tg} 3x}=\frac{10x\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cos 3x.$$

Gdy $x\to 0$, to $\dfrac{3x}{\sin 3x}\to 1$, $\cos 3x\to\cos(3\cdot 0)=\cos 0=1$ [1], więc poszukiwana granica jest równa $\frac{10}{3}$.

---

[1] $\cos 3x$ jest funkcją złożoną, ciągłą dla wszystkich wartości x (patrz twierdzenie (5.4.4)), gdyż $\cos u$ jest funkcją ciągłą dla każdego u oraz $3x$ jest funkcją ciągłą dla każdego x.

ZADANIE 5.8. Obliczyć $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\sqrt{x(x-\sqrt{x^2-1})}.$$

Rozwiązanie. Mnożąc i dzieląc $f(x)$ przez $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ otrzymujemy

$$f(x)=\frac{\sqrt{x[x^2-(x^2-1)]}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}.$$

Następnie dzieląc licznik i mianownik przez $\sqrt{x}$ otrzymujemy (1)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}.$$

Wreszcie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ZADANIE 5.9. Obliczyć granicę funkcji

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

w punkcie $x=1$.

Rozwiązanie. W punkcie $x=1$ dana funkcja nie jest określona. Przedstawiamy naszą funkcję w postaci iloczynu dwóch ułamków:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Pierwszy czynnik

$$g(x)=\frac{1}{1+x}$$

funkcji $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=1$; mamy

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

Drugi czynnik

$$h(x)=\frac{1}{1-x}$$

ma granicę lewostronną i granicę prawostronną różne:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to1+0}\frac{1}{1-x}=-\infty.$$

(1) Otrzymujemy wyrażenie, które jest funkcją złożoną, ciągłą dla $x\geqslant1$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x^2}=-\infty.$$

ZADANIE 5.10. Obliczyć granice wielomianu

$$w(x)=2x^3-10x^2+15x-18,$$

gdy $x\to-\infty$ i gdy $x\to+\infty$.

Rozwiązanie. Wyłączamy $2x^3$ przed nawias:

$$w(x)=2x^3\left(1-\frac{5}{x}+\frac{15}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{15}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{15}{2x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x^3}=1,$$

gdyż trzy granice ułamków, jak łatwo zauważyć, równają się zeru. Natomiast, jak widać wprost z definicji w § 5.3, mamy

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, wystarczy bowiem przyjąć $K=\max(1, M)$ [1],

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, wystarczy bowiem przyjąć $K=\min(-1, M)$ [2],

a więc ostatecznie

$$\lim_{x\to+\infty} w(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} w(x)=-\infty.$$

Uogólniając, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

(5.4.16) *Gdy $x\to+\infty$, to wielomian $w(x)$ stopnia nieparzystego względem x dąży do nieskończoności z takim znakiem, jaki ma współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x, a gdy $x\to-\infty$, to tenże wielomian $w(x)$ dąży do nieskończoności ze znakiem przeciwnym do znaku współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.*

ZADANIE 5.11. Obliczyć granice wielomianu

$$w(x)=-3x^4+5x^3-2x^2-x+15,$$

gdy $x\to+\infty$ i gdy $x\to-\infty$.

Rozwiązanie. Postępując jak wyżej stwierdzamy, że granica wielomianu $w(x)$ zarówno przy $x\to+\infty$, jak i przy $x\to-\infty$ zależy jedynie od granicy wyrażenia $-3x^4$. Po-

[1] Symbol $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb a i b, gdy są nierówne, a w przypadku $a=b$ przyjmujemy $\max(a, b)=a=b$.

[2] Symbol $\min(a, b)$ oznacza mniejszą z liczb a i b, gdy są nierówne, a w przypadku $a=b$ przyjmujemy $\min(a, b)=a=b$.

nieważ, jak łatwo okazać:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^4)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}(-3x^4)=-\infty,$$

więc

$$\lim_{x\to-\infty} w(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} w(x)=-\infty.$$

Uogólniając możemy wypowiedzieć twierdzenie:

(5.4.17) *Wielomian $w(x)$ stopnia parzystego względem zmiennej x zarówno przy $x\to-\infty$, jak i przy $x\to+\infty$ dąży do nieskończoności tego samego znaku co znak współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x.*

ZADANIE 5.12. Wyznaczyć granicę funkcji

$$f(x)=e^{1/x}$$

w punkcie $x=0$.

Rozwiązanie. Przy wyznaczaniu prawostronnej i lewostronnej granicy danej funkcji korzystamy z następujących wzorów dotyczących funkcji wykładniczej:

(5.4.18)
$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad \text{dla} \quad a>1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad \text{dla} \quad 0<a<1.$$

Opierając się na powyższych wzorach oraz korzystając z wyników zadania 5.4 otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+0} e^{1/x}=+\infty, \quad \lim_{x\to-0} e^{1/x}=0.$$

ZADANIE 5.13. Obliczyć granicę funkcji $e^{1/(1-x^2)}$ w punkcie $x=1$.

Rozwiązanie. Opierając się na wzorach (5.4.18) oraz na wynikach zadania 5.9 otrzymujemy

$$\lim_{x\to1+0} e^{\frac{1}{1-x^2}}=0, \quad \lim_{x\to1-0} e^{\frac{1}{1-x^2}}=+\infty.$$

ZADANIE 5.14. *Znaleźć* granicę wartości L obwodu wielokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R, gdy ilość boków dąży do nieskończoności.

Rozwiązanie. Długość obwodu foremnego wielokąta o n bokach (rys. 5.5):

$$L_n=n\cdot2\cdot R\sin\frac{\pi}{n}=2Rn\sin\frac{\pi}{n}.$$

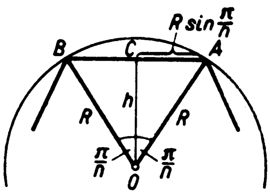
Graniczna wartość obwodu:

$$L=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}2Rn\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}2R\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=2\pi R.$$

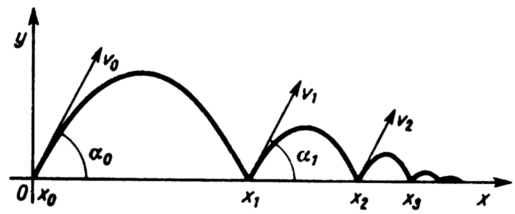
ZADANIE 5.15. Rozważmy ciąg wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu R, gdy ilość boków wielokąta dąży do nieskończoności. Znaleźć granicę S pól tych wielokątów.

Rozwiązanie. Podzielmy wielokąt na trójkąty (rys. 5.5). Przez h oznaczmy wysokość trójkąta, a przez n ilość boków wielokąta. Z trójkąta OCA otrzymujemy

$$h=R\cos\frac{\pi}{n}, \qquad CA=R\sin\frac{\pi}{n}.$$



Rys. 5.5



Rys. 5.6

Pole powierzchni wielokąta foremnego o n bokach wynosi

$$S_n=n\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}\cdot R\cos\frac{\pi}{n}=R^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Graniczna wartość pola:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}R^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi R^2\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Korzystając ze wzoru (5.4.15) otrzymujemy $S=\pi R^2$.

ZADANIE 5.16. Piłka odbija się od płaszczyzny poziomej w punkcie $P_0(x_0)$ pod kątem α_0 z prędkością początkową v_0, opada i ponownie odbija się kolejno: w punkcie $P_1(x_1)$ pod kątem α_1 z prędkością v_1, w punkcie $P_2(x_2)$ pod kątem α_2 z prędkością $v_2, \ldots$, w puncie $P_n(x_n)$ pod kątem α_n z prędkością v_n. Przy każdym odbiciu część energii kinetycznej zostaje stracona, wskutek czego prędkości piłki w momentach odbicia maleją.

Zakładając, że

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\ldots=\alpha$$

oraz

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{v_2}{v_1}=\ldots=\frac{v_{n+1}}{v_n}=\ldots=c<1,$$

obliczyć odległość d, na jaką piłka odskoczy od punktu $P_0(x_0)$ (rys. 5.6).

Rozwiązanie. Jeżeli prędkość piłki odskakującej pod kątem α wynosi v, to składowa pozioma prędkości jest $v_x=v\cos\alpha$, a składowa pionowa $v_y=v\sin\alpha$. Czas wznoszenia

$$t=\frac{v_y}{g}=\frac{v\sin\alpha}{g}.$$

W tym czasie piłka odskoczy w kierunku poziomym na odległość

$$x=v_x t=v\cos\alpha\frac{v\sin\alpha}{g}=\frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}.$$

Mamy więc

$$x_1-x_0=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},\quad x_2-x_1=\frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g},\quad \ldots,\quad x_{n+1}-x_n=\frac{v_n^2\sin 2\alpha}{g},\quad \ldots$$

Trzeba zsumować szereg

$$d=\frac{\sin 2\alpha}{g}(v_0^2+v_1^2+\ldots+v_n^2+\ldots).$$

Podstawiając

$$v_1=cv_0,\quad v_2=c^2v_0,\quad \ldots,\quad v_n=c^n v_0,\quad \ldots$$

otrzymujemy

$$d=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}(1+c^2+c^4+\ldots+c^{2n}+\ldots),$$

co przy $0<c<1$ daje

$$d=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\cdot\frac{1}{1-c^2}.$$

Zadanie 5.17. Bryła składa się ze stosu walców leżących kolejno jeden na drugim i mających wspólną oś. Dolny walec ma promień $r=10$ cm i wysokość $h=1$ cm, a promień i wysokość każdego następnego walca są dwa razy mniejsze od promienia i wysokości walca poprzedzającego. Obliczyć wysokość i objętość bryły, gdy ilość walców nieskończenie wzrasta.

Rozwiązanie. Gdyby było n walców, to suma ich wysokości wynosiłaby

$$H_n=h+\frac{h}{2}+\frac{h}{2^2}+\ldots+\frac{h}{2^{n-1}}=h\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2h\left(1-\frac{1}{2^n}\right),$$

a suma objętości wynosiłaby

$$V_n=\pi r^2h+\frac{\pi r^2h}{8}+\frac{\pi r^2h}{8^2}+\ldots+\frac{\pi r^2h}{8^{n-1}}=$$

$$=\pi r^2h\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}\right)=\pi r^2h\frac{1-\frac{1}{8^n}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{8^n}\right).$$

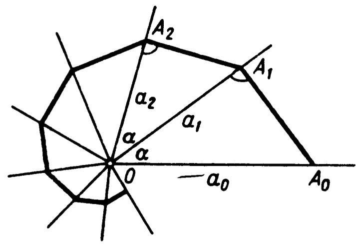
Gdy $n \to \infty$, mamy

$$H=\lim_{n\to\infty} H_n=\lim_{n\to\infty} 2h\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2h, \qquad V=\lim_{n\to\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{7}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{8^n}\right)=\frac{8}{7}\pi r^2 h.$$

Zadanie 5.18. Dany jest odcinek a_0 i kąt ostry α. Na płaszczyźnie dane są we współrzędnych biegunowych punkty:

$$A_0(\varphi=0,\ \rho=a),\ A_1(\varphi=\alpha,\ \rho=a\cos\alpha),\ \ldots,\ A_n(\varphi=n\alpha,\ \rho=a\cos^n\alpha),\ldots$$

Obliczyć granicę długości linii łamanej $A_0A_1A_2\ldots A_n\ldots$ (rys. 5.7).



Rys. 5.7

Rozwiązanie. Obliczmy kolejno boki łamanej:

$$A_0A_1=a_0\sin\alpha, \quad A_1A_2=a_1\sin\alpha=a_0\cos\alpha\sin\alpha, \quad \ldots,$$
$$A_{n-1}A_n=a_0\cos^n\alpha\sin\alpha, \quad \ldots$$

Trzeba znaleźć sumę szeregu

$$L=\sum_{n=0}^{\infty} a\cos^n\alpha\sin\alpha, \quad \text{czyli} \quad L=a\sin\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha.$$

Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha=\frac{1}{1-\cos\alpha},$$

więc

$$L=\frac{a\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \text{skąd} \quad L=a\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Zadania

Obliczyć następujące granice (zad. 5.19 - 5.53):

5.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^5+32}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+125}{2x^2-50}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

5.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$.

5.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.32 położyć $1+mx=t^3$.

5.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, n — liczba naturalna.

5.34. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$.

5.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

5.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

5.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

5.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\sin 2x}$.

5.39. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.40. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.41. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$.

5.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{4x}$.

5.43. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sin\frac{1}{8}\pi x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.43 zastosować wzór $\sin x=\sin(\pi-x)$.

5.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

5.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

5.46. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

5.47. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi}\dfrac{\cos x-\cos\frac{1}{4}\pi}{\sin x-\sin\frac{1}{4}\pi}$.

5.48. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$.

5.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.49 położyć $\operatorname{arctg} x=\alpha$.

5.50. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$. **5.51.** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.50 położyć $\arcsin(1-2x)=\alpha$.

5.52. $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$. **5.53.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

Zbadać ciągłość następujących funkcji (zad. 5.54 - 5.60):

5.54. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ dla $x\neq -5$ i $f(-5)=-10$.

5.55. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.56. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.57. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. **5.58.** $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$.

5.59. $f(x)=x-[x]$. **5.60.** $f(x)=[x]+[-x]$.

W zadaniach 5.61 - 5.63 określić funkcję $f(x)$ w punkcie $x=0$ tak, aby była ona ciągła:

5.61. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. **5.62.** $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

5.63. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji (zad. 5.64 - 5.75):

5.64. $\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$ w punkcie $x=0$. **5.65.** $\dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right]$ w punkcie $x=0$.

5.66. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ w punkcie $x=0$. **5.67.** $e^{\frac{1}{1-x^3}}$ w punkcie $x=1$.

5.68. $xe^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$. **5.69.** $\dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ w punkcie $x=1$.

5.70. $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x=0$.

5.71. $2^{\frac{1}{x-a}}$ w punkcie $x=a$.

5.72. $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ w punkcie $x=0$.

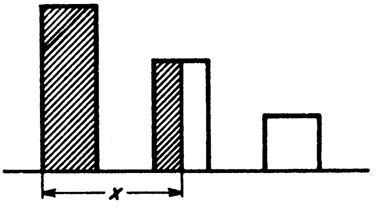
5.73. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } -\infty<x<0, \\ \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } 0<x<\infty \end{cases}$ w punkcie $x=0$.

5.74. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$ w punkcie $x=0$.

5.75. $\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{b-c}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{x-a}$ w punkcie $x=a$.

5.76. Znaleźć graniczną wartość pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ $(b\neq 0)$ przy $a\to 0$.

5.77. Dane są trzy prostokąty o jednakowych podstawach równych 1 m i o wysokościach odpowiednio równych 3, 2 i 1 m ustawione w odległości 1 m od siebie (rys. 5.8). Zakładając, że x zmienia się w sposób ciągły, wyrazić zakreślone pole jako funkcję x. Czy funkcja ta będzie ciągła?



Rys. 5.8

5.78. Wierzchołek B trójkąta ABC porusza się po prostej BE równoległej do prostej AC oddalając się nieograniczenie w prawo. Zbadać, jak się będą zmieniały boki trójkąta, kąty wewnętrzne i kąt zewnętrzny BCD.

5.79. Niech p oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym φ, p_1 natomiast oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym $\frac{1}{2}\varphi$. Obliczyć granicę stosunku strzałek p/p_1, gdy $\varphi\to 0$.

5.80. W kole poprowadzono cięciwę AB. Punkty A i B połączono ze środkiem C łuku AB. Przez punkty A i B poprowadzono następnie styczne do koła przecinające się w punkcie D. Obliczyć granicę stosunku pól trójkątów ABC i ABD, gdy kąt środkowy oparty na łuku AB dąży do 0.

5.81. Niech funkcja $f(t)$ będzie równa ilości stanów skupienia związku H_2O (lód, woda, para) w temperaturze t pod ciśnieniem 1 atm. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną funkcji w temperaturze $t=0°$ oraz wartość funkcji dla $t=0°$. Czy funkcja w punkcie $t=0°$ jest ciągła?